Exercice 1

On considère f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t)=1$ sur $[0;\pi]$ et $f(t)=-1$ sur $]\pi;2\pi[$. De plus f est une fonction $2\pi-$périodique.
1) Dessiner f sur $[-\pi;2\pi]$

2) Calculer $a_0=\dfrac{1}{2\pi}\times\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,dt$

3) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, calculer $a_n=\dfrac{2}{2\pi}\times\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$

4) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, calculer $b_n=\dfrac{2}{2\pi}\times\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\sin(n\omega t)\,dt$

On appelle $S(t)=a_0+\displaystyle\sum_{n=1} a_n\,\cos(n\omega t)+b_n\,\sin(n\omega t)$ la série de Fourier associée à f

5) Exprimer la somme partielle : $S_5(t)=a_0+\displaystyle\sum_{n=1}^{5} a_n\,\cos(nt)+b_n\,\sin(nt)$

6) Calculer le carré de la valeur efficace de f, noté $V^2_{eff(f)}=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(t)dt$

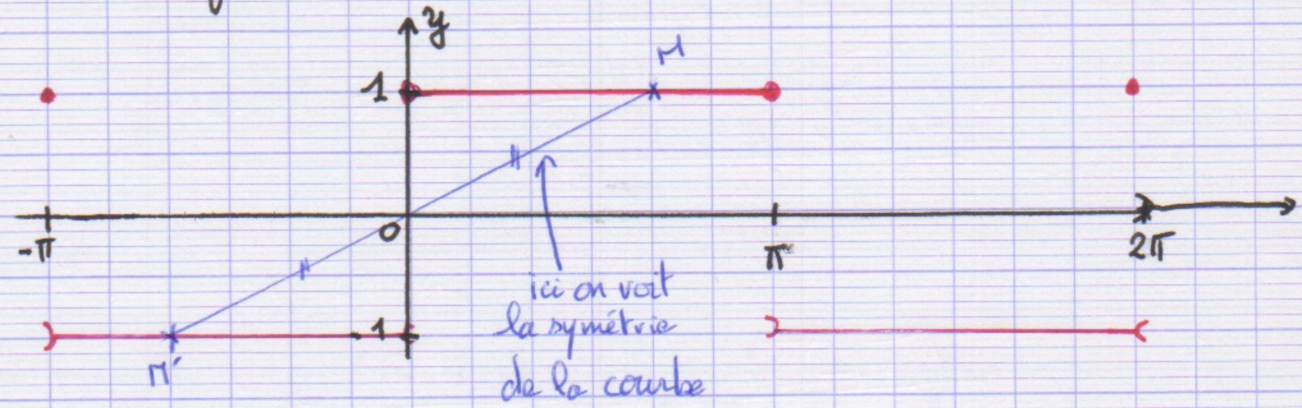
7) En utilisant l'égalité due au mathématicien Marc-Antoine Parseval des Chênes (1755-1836) qui démontre que $V^2_{eff(S_5)}=a_0^2+\dfrac{1}{2}\times\displaystyle\sum_{n=1}^{5} a_n^2+b_n^2$, calculer $V^2_{eff(S_5)}$

8) Montrer que le rapport $\dfrac{V^2_{eff(S_5)}}{V^2_{eff(f)}}$ est proche de 1.

Exercice 1

$$\begin{cases} f(t) = 1 & \text{sur } [0;\pi] \\ f(t) = -1 & \text{sur }]\pi; 2\pi[\end{cases}$$ et f est de période 2π.

1°) Dessinons f sur $[-\pi; 2\pi]$



2°) $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi} \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vu graphiquement}}}{0} = 0$ $\boxed{a_0 = 0}$

3°) La fonction f est impaire (sa représentation est symétrique par rapport à O)

Donc $\boxed{a_n = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$

4°) $b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$ $\left(\omega = \frac{2\pi}{T} = 1\right)$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -\sin(nt)\,dt + \int_{0}^{\pi}\sin(nt)\,dt\right) = \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{\cos(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_{0}^{\pi}\right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos 0}{n} - \frac{\cos(n\pi)}{n} + \frac{-\cos(n\pi)}{n} + \frac{\cos(0)}{n}\right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{n} - \frac{2(-1)^n}{n}\right) = \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)$$

$$\boxed{b_n = \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)}$$

5°) Résumons les valeurs des coefficients dans le tableau :

n	a_n	b_n
0	0	$\times$
1	0	$\frac{4}{\pi}$
2	0	0
3	0	$\frac{4}{3\pi}$
4	0	0
5	0	$\frac{4}{5\pi}$

On a donc $S_5(t) = b_1 \sin(t) + b_3 \sin(3t) + b_5 \sin(5t)$

$$\boxed{S_5(t) = \frac{4}{\pi}\sin(t) + \frac{4}{3\pi}\sin(3t) + \frac{4}{5\pi}\sin(5t)}$$

6°) $V_{eff(f)}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[t\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\pi-(-\pi)\right) = 1$

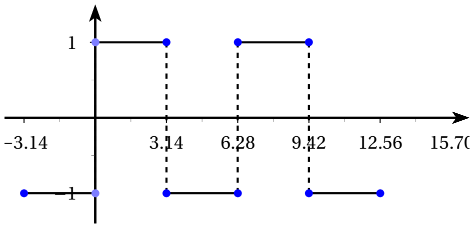
7°) $V_{eff(S_5)}^2 = 0 + \frac{1}{2}\left(b_1^2\right) + \frac{1}{2}\left(b_3^2\right) + \frac{1}{2}\left(b_5^2\right)$

$= \frac{1}{2}\times\frac{16}{\pi^2} + \frac{1}{2}\times\frac{16}{9\pi^2} + \frac{1}{2}\times\frac{16}{25\pi^2} = \frac{8}{\pi^2} + \frac{8}{9\pi^2} + \frac{8}{25\pi^2}$

$V_{eff(S_5)}^2 \simeq \frac{8}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}\right) \simeq 0{,}933$

8°) $\frac{V_{eff(S_5)}^2}{V_{eff(f)}^2} \simeq 0{,}933$ est proche de 1

1) Dessiner f sur $[-\pi;4\pi]$



On considère f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = 1$ sur $[0;\pi]$ et $f(t) = -1$ sur $]\pi;2\pi[$. De plus f est une fonction $2\pi-$périodique.

2) Calculer $a_0 = \dfrac{1}{2\pi} \times \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,dt$

Le dessin nous révèle que f est impaire donc $a_0 = 0$

Sinon on calcule $a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)dt = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(t)dt + \dfrac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} f(t)dt = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 1dt + \dfrac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} -1dt = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = 0$

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $a_n = \dfrac{2}{2\pi} \times \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$

Le dessin nous révèle que f est impaire donc $a_n = 0$

Sinon on calcule
$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt dt = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos nt dt + \frac{2}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} f(t)\cos nt dt \\
&= \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} \cos nt dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} -\cos nt dt \\
&= \frac{2}{2\pi}\left[\frac{\sin nt}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{2\pi}\left[\frac{\sin nt}{n}\right]_{\pi}^{2\pi} = 0 \qquad \text{car } \sin 0 = 0,\ \sin n\pi = 0 \text{ et } \sin 2n\pi = 0
\end{aligned}
$$

4) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $b_n = \dfrac{2}{2\pi} \times \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\sin(n\omega t)\,dt$

On calcule
$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt dt = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin nt dt + \frac{2}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} f(t)\sin nt dt \\
&= \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin nt dt + \frac{2}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} -\sin nt dt \\
&= \frac{2}{2\pi}\left[\frac{-\cos nt}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{2\pi}\left[\frac{-\cos nt}{n}\right]_{\pi}^{2\pi} \qquad \text{or } \cos 0 = 1,\ \cos n\pi = (-1)^2 \text{ et } \cos 2n\pi = 1 \\
&= \frac{2}{2\pi}\left(\frac{-(-1)^n + 1}{n}\right) - \frac{1}{2\pi}\left(\frac{-1 + (-1)^n}{n}\right) \\
&= \frac{4}{2\pi}\left(\frac{-(-1)^n + 1}{n}\right) = \frac{2}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right)
\end{aligned}
$$

On appelle $S(t) = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ la série de Fourier associée à f

5) Exprimer la somme partielle : $S_5(t) = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{5} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$

n	0	1	2	3	4	5
a_n	0	$\frac{4}{\pi}$	0	$\frac{4}{3\pi}$	0	$\frac{4}{5\pi}$

donc $S_5(t) = \dfrac{4}{\pi}\sin t + \dfrac{4}{3\pi}\sin t + \dfrac{5}{\pi}\sin t$

6) Calculer le carré de la valeur efficace de f, noté $V^2_{eff(f)} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(t)dt$

$$V^2_{eff(f)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)^2(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\pi} 1^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}(\pi + \pi) = 1$$

6) En utilisant l'égalité de Parseval : $V^2_{eff(S_5)} = a_0^2 + \dfrac{1}{2} \times \displaystyle\sum_{n=1}^{5} a_n^2 + b_n^2$, calculer $V^2_{eff(S_5)}$

$$V^2_{eff(S_5)} = 0 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{16}{\pi^2} + \frac{16}{9\pi^2} + \frac{16}{25\pi^2}\right) \approx 0,933$$

7) Montrer que le rapport $\dfrac{V^2_{eff(S_5)}}{V^2_{eff(f)}}$ est proche de 1.

Le rapport est environ égal à $\dfrac{0,933}{1} = 0,933$