

Partie A : résolution d'une équation différentielle du second ordre

Dans cette partie, on suppose que $b = 1$ et $c = 0,25$. De plus, le signal d'entrée, constant, est défini pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0; +\infty[$ par $e(t) = 10$.

La fonction causale s est donc solution sur l'intervalle $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E) : y'' + y' + 0,25y = 2,5.$$

$$\text{et } s(0) = 0, s'(0) = 0$$

1. Déterminer une fonction constante sur $[0; +\infty[$ solution particulière de l'équation différentielle (E) .
2. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y'' + y' + 0,25y = 0$.
3. En déduire la forme générale des solutions de l'équation différentielle (E) .
4. Parmi les quatre expressions ci-dessous, laquelle est celle de $s(t)$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$?

Recopier la réponse choisie sur la copie.

$$\bullet 5te^{-0,5t}$$

$$\bullet 10 - (2,5t + 10)e^{-0,25t}$$

$$\bullet 10 - (5t + 10)e^{-0,5t}$$

$$\bullet 10 - (10t + 10)e^{-0,5t}$$

On considère un système physique dont l'état est modélisé par la fonction y de la variable réelle t , solution de l'équation différentielle :

$$y''(t) + 4y(t) = e(t) \quad (1),$$

où la fonction e représente une contrainte extérieure au système.

Partie A

Dans cette partie, on suppose que $e(t) = 20$ pour tout nombre réel t .

L'équation différentielle (1) s'écrit alors sous la forme :

$$y''(t) + 4y(t) = 20 \quad (2).$$

1. Déterminer la fonction constante h solution particulière de l'équation différentielle (2).
2. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (2).
3. En déduire l'expression de la fonction f solution de l'équation différentielle (2) qui vérifie les conditions $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

$$y''(t) + 4y(t) = 20$$

1°) $h(t) = 5$ est une solution particulière car $h'(t) = 0$ (3)
 donc $0 + 4h(t) = 4 \times 5 = 20$

2°) L'équation sans second membre s'écrit : $y'' + 4y = 0$
 Son équation caractéristique est : $x^2 + 4 = 0$

$$\text{donc } x^2 = -4$$

$$\text{c.à.d. : } x = \pm 2i$$

La solution générale de l'équation sans second membre s'écrit donc :

$$y_0(t) = (\lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t))e^{0t}$$

$$\boxed{y_0(t) = \lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t)} \quad \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$$

La solution générale de l'équation complète (2) s'écrit donc (4)

$$\boxed{y(t) = \lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t) + 5} \quad \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$$

3°) Comme $f(t)$ est une solution de (2).

$$f(t) = \lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t) + 5$$

$$\text{De plus, } f(0) = 0 \Leftrightarrow \lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -5$$

$$\text{Donc } f(t) = -5 \cos(2t) + \mu \sin(2t) + 5$$

$$\text{ainsi } f'(t) = +10 \sin(2t) + 2\mu \cos(2t)$$

$$\text{or } f'(0) = 0 \text{ donc } 2\mu = 0 \text{ donc } \mu = 0$$

conclusion : $\boxed{f(t) = -5 \cos(2t) + 5}$ (4)

Correction du devoir

1°) La constante 10 est une solution particulière de (E)
car $0,25 \times 10 = 2,5$.

2°) $y'' + y' + 0,25y = 0$ est une équation différentielle du second ordre. Son équation caractéristique est:

$$r^2 + r + 0,25 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 0,25 = 0$$

Il y a une solution réelle: $r = -\frac{1}{2} = -0,5$

La solution générale de (E) s'écrit donc:

$$y_0(t) = (\lambda t + \mu) e^{-0,5t} \quad \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$$

3°) D'après 1°) la constante 10 est solution particulière de (E).
Les solutions de (E) s'écrivent donc:

$$y(t) = (\lambda t + \mu) e^{-0,5t} + 10$$

4°) $s(t)$ est une solution de (E). Elle s'écrit donc sous la forme
 $s(t) = (\lambda t + \mu) e^{-0,5t} + 10$

on élimine donc $5t e^{-0,5t}$ et $10 - (5t + 10) e^{-0,25t}$

$$\text{Si } s(t) = 10 - (10t + 10) e^{-0,5t}$$

$$\text{alors } s'(t) = 0 - (10 e^{-0,5t} + (10t + 10) \times (-0,5) \times e^{-0,5t})$$

$$\text{donc } s'(0) = -(10 + 10 \times (-0,5)) = -5$$

Cette solution ne convient donc pas.

$$\text{Celle qui convient est donc: } s(t) = 10 - (5t + 10) e^{-0,5t}$$