Classe: TS2ET	Date: 4/12/2017	**Type**
Devoir n°5		**Devoir maison pour 11/12/17**
Thème: Transformée de Laplace		

En physique, l'étude d'un mouvement amorti amène à considérer la fonction f(t) telle que:

a) $f(t)=0$ pour $t<0$;

b) $f''(t)+2f'(t)+2f(t)=e^{-t}U(t)$ pour $t\geq 0$; (E)

c) $f(0)=1$ et $f'(0)=0$.

Partie A- Application de la transformée de Laplace

On suppose que f(t) et ses dérivées admettent des transformées de Laplace. On note F(p) la transformée de Laplace de f(t).

1. Déterminer, à l'aide de F(p), les transformées de Laplace de f'(t) et f''(t). En déduire celle de $f''(t)+2f'(t)+2f(t)$.

2. Déterminer la transformée de Laplace de $e^{-t}U(t)$.

3. Déduire de ce qui précède la fonction F(p).

Partie B- Résolution de l'équation (E) et recherche de f.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout p≠1 :

$$\frac{p^2+3p+3}{(p+1)(p^2+2p+2)}=\frac{a}{p+1}+\frac{bp+c}{p^2+2p+2}$$

5. En déduire la fonction f(t) vérifiant les trois conditions a)b)c) données ci-dessus.

Correction

Partie A ① $\mathcal{L}(f'(t)) = pF(p) - f(0^+) = \boxed{pF(p) - 1}$ 0,5 pt

$\mathcal{L}(f''(t)) = p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+) = \boxed{p^2F(p) - p}$ 0,5 pt

On en déduit :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(f''(t) + 2f'(t) + 2f(t)) \\
&= \mathcal{L}(f''(t)) + 2\mathcal{L}(f'(t)) + 2\mathcal{L}(f(t)) \\
&= p^2F(p) - p + 2(pF(p) - 1) + 2F(p) \\
&= p^2F(p) - p + 2pF(p) - 2 + 2F(p) \\
&= \boxed{(p^2+2p+2)F(p) - p - 2}
\end{aligned}$$

2 pts

② $\mathcal{L}(e^{-t}U(t)) = \dfrac{1}{p+1}$ (d'après le formulaire) 2 pts

③ Comme $f''(t) + 2f'(t) + 2f(t) = e^{-t}U(t)$

donc $\mathcal{L}(f''(t) + 2f'(t) + 2f(t)) = \mathcal{L}(e^{-t}U(t))$

d'où $(p^2+2p+2)F(p) - p - 2 = \dfrac{1}{p+1}$

ainsi $(p^2+2p+2)F(p) = \dfrac{1}{p+1} + p + 2$

$$(p^2+2p+2)F(p) = \frac{1 + (p+2)(p+1)}{(p+1)}$$

$$(p^2+2p+2)F(p) = \frac{p^2+3p+3}{(p+1)}$$

$$\boxed{F(p) = \frac{p^2+3p+3}{(p+1)(p^2+2p+2)}}$$

4 pts

Partie B ① $\dfrac{p^2+3p+3}{(p+1)(p^2+2p+2)} = \dfrac{a}{p+1} + \dfrac{bp+c}{p^2+2p+2}$

$$\iff \frac{p^2+3p+3}{(p+1)(p^2+2p+2)} = \frac{a(p^2+2p+2)+(bp+c)(p+1)}{(p+1)(p^2+2p+2)}$$

$$\iff p^2+3p+3 = ap^2+2ap+2a+bp^2+bp+cp+c$$

$$\iff p^2+3p+3 = (a+b)p^2+(2a+b+c)p+2a+c$$

$$\iff \begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b+c=3 \\ 2a+c=3 \end{cases} \quad \text{(identification des coefficients)}$$

$$\iff \begin{cases} a=1-b \\ 2(1-b)+b+c=3 \\ 2(1-b)+c=3 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1-b \\ 2-2b+b+c=3 \\ 2-2b+c=3 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1-b \\ -b+c=1 \\ -2b+c=1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a=1-b \\ b=c-1 \\ -2(c-1)+c=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1-b \\ b=c-1 \\ -2c+2+c=1 \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=1 \end{cases}}$$

(5pts)

Donc $\dfrac{p^2+3p+3}{(p+1)(p^2+2p+2)} = \dfrac{1}{p+1} + \dfrac{1}{p^2+2p+2}$

2° On sait que : $F(p) = \dfrac{p^2+3p+3}{(p+1)(p^2+2p+2)}$

Ainsi, d'après 1°

$$F(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p^2+2p+2}$$

$$F(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2+1}$$ (1pt)

D'où :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(F(p)\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p+1)^2+1}\right)$$

$$f(t) = \underbrace{e^{-t}U(t)}_{(2,5pts)} + \underbrace{\sin(t)\,e^{-t}U(t)}_{(2,5pts)}$$ (d'après le formulaire)

$$\boxed{f(t) = e^{-t}\left(1+\sin(t)\right)U(t)}$$